Elektrotechnik (Teil 1/3)

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

Organisatorisches

- Moodle-Kurs: https://link.hm.edu/hnyu
- Matrix-Raum: https://link.hm.edu/83kf
- Sprechstunde: Do. 10:30–11:30, Raum, B 374
- Literatur
  - Pregla – OPAC
  - Hagmann – OPAC
  - Hering u.a. – online
  - Fischer – online
- Vorlesungsskript Prof. Palme u.a.: https://palme.userweb.mwn.de/
- Prüfung: schriftlich, 60 Minuten, keine Hilfsmittel

Gliederung des Kurses

1. Einführung (Physikalische Größen, Einheiten)
2. Das elektrische Feld (Ladungen, Kräfte, Felder, Potential, Spannung, Kapazität, Kondensatoren)
3. Gleichstrom (Stromstärke, Widerstand, Stromkreisberechnungen, Energie, Leistung)
4. Magnetismus (Feld in Vakuum und Materie, Kräfte, magnetischer Kreis)
5. Elektromagnetische Induktion (Induktion, Selbstinduktion, Energie)
6. Wechselstrom (Komplexe Wechselstromrechnung, Schaltungen, Leistung)
7. Drehstrom (Dreiphasensystem)
8. Schaltvorgänge an Kapazitäten und Induktivitäten

Einführung

1. Physikalische Größen
2. Internationales Einheitensystem (SI)

Physikalische Größen

… sind messbare Eigenschaften eines Systems.

Skalare Größen: werden durch einen *Zahlenwert* und eine *Einheit* beschrieben.

$$x = \underbrace{\{x\}}_{\text{Zahlenwert}} \cdot \underbrace{[x]}_{\text{Einheit}}$$

Beispiele:

- $t = 10\,\mathrm{s}$ (Zeit)
- $m = 5\,\mathrm{kg}$ (Masse)
- $\Delta T = -20\,\mathrm{K}$ (Temperaturdifferenz)

Rechnen mit Einheiten

- Nur Größen mit gleichen Einheiten können addiert oder subtrahiert werden

$$x = 2\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$$

- Bei Multiplikation/Division von Größen werden die Einheiten multipliziert/dividiert

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7{,}2\,\mathrm{km/h}$$

Hinweis: im Textsatz werden Einheiten immer aufrecht geschrieben, Variablen *kursiv*.

Vektorielle physikalische Größen

… sind physikalische Größen, die durch einen *Betrag* und eine *Richtung* beschrieben werden. Der Betrag wird durch einen *Zahlenwert* und eine *Einheit* beschrieben.

$$\vec{v} \equiv \mathbf{v} = \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\vec{e}_v}_{\text{Richtung}}$$

$$|\vec{v}| \equiv v = \underbrace{\{v\}}_{\text{Zahlenwert}} \cdot \underbrace{[v]}_{\text{Einheit}}$$

Der Zahlenwert des Betrags ist immer positiv.

Beispiele:

- $\vec{v} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \vec{e}_x$ (Geschwindigkeit)
- $\vec{a} = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (\vec{e}_{-z})$ (Beschleunigung)

Das Internationale Einheitensystem (SI)

Basisgröße	Größensymbol	Dimensionssymbol	Einheit	Einheitenzeichen
Zeit	t	T	Sekunde	s
Länge	l	L	Meter	m
Masse	m	M	Kilogramm	kg
Elektrische Stromstärke	I	I	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	T	Θ	Kelvin	K
Stoffmenge	n	N	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	J	Candela	cd

Naturkonstanten und SI-Einheiten

Konstante	Beschreibung	Exakter Wert	Einheit
$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	Strahlung des Caesium-Atoms	9 192 631 770	Hz
c	Lichtgeschwindigkeit	299 792 458	m/s
h	Planck-Konstante	6,62607015 × 10−34	J · s
e	Elementarladung	1,602176634 × 10−19	C
k_{B}	Boltzmann-Konstante	1,380649 × 10−23	J/K
N_{A}	Avogadro-Konstante	6,02214076 × 1023	mol ¹
K_{cd}	Photometrisches Strahlungsäquivalent	683	lm/W

Abgeleitete Einheiten

Von den Basisgrößen lassen sich durch mathematische Operationen abgeleitete Einheiten bilden. Beispiele für abgeleitete Einheiten:

- **Kraft**: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $[F] = [m] \cdot [\vec{a}] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$ (Newton)
- **Energie/Arbeit**: $W = F \cdot s$ $[W] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{J}$ (Joule)
- **Leistung**: $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ $[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} = \mathrm{W}$ (Watt)

Dimensionsanalyse

Jede physikalische Größe hat – unabängig von Einheit oder Zahlenwert – eine **Dimension**, die beschreibt, wie die Größe aus den Grundgrößen zusammengesetzt ist.

Beispiele:

- Geschwindigkeit: $\dim[v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$
- Kraft: $\dim[F] = \mathrm{M} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}$
- Winkel: $\dim[\varphi] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 1$ (dimensionslos)

Beide Seiten einer Gleichung müssen dieselbe Dimension haben!

SI-Präfixe (alltäglich)

Faktor	Name	Präfix	Faktor	Name	Präfix
10^{-1}	Dezi	d	10^{1}	Deka	da
10^{-2}	Zenti	c	10^{2}	Hekto	h
10^{-3}	Milli	m	10^{3}	Kilo	k
10^{-6}	Mikro	µ	10^{6}	Mega	M
10^{-9}	Nano	n	10^{9}	Giga	G
10^{-12}	Piko	p	10^{12}	Tera	T

SI-Präfixe (nicht alltäglich)

Faktor	Name	Präfix	Faktor	Name	Präfix
10^{-15}	Femto	f	10^{15}	Peta	P
10^{-18}	Atto	a	10^{18}	Exa	E
10^{-21}	Zepto	z	10^{21}	Zetta	Z
10^{-24}	Yokto	y	10^{24}	Yotta	Y
10^{-27}	Ronto	r	10^{27}	Ronna	R
10^{-30}	Quecto	q	10^{30}	Quetta	Q

µ & °C: praktische Tipps

- Mikro: µ (griechischer Buchstabe “My”)
  - Deutsches Tastaturlayout: `AltGr` + `m`
- Grad Celsius: °C (Gradzeichen + Großbuchstabe C)
  - Deutsches Tastaturlayout: `Shift` + `^` + `C`

Nur in Systemen, die diese Schriftzeichen nicht unterstützen (ASCII) laut DIN 66030:2002-05:

- µ → u
- °C → Cel

Nicht-SI-Einheiten in der Luftfahrt

Immer noch weit verbreitet:

- Flughöhe in **Fuß**
  - 1 ft = 0,3048 m
- Entfernung in **Seemeilen**
  - 1 NM = 1852 m
- Geschwindigkeit in **Knoten**
  - 1 kt = 1 NM/h = 1,852 km/h

Mars Climate Orbiter

https://www.youtube.com/watch?v=MfavzjbZzl8

Das elektrische Feld

1. Elektrische Ladung
2. Coulomb'sches Gesetz
3. Elektrisches Feld im Vakuum
4. Feldlinien und Gauß'sches Gesetz
5. Elektrisches Feld in Materie
6. Potential, Spannung, Arbeit
7. Homogenes Feld und Kondensatoren

Die vier fundamentalen Wechselwirkungen

1. **Gravitation**
   - Hält das Sonnensystem zusammen – wirkt auf Masse
2. **Elektromagnetismus**
   - Hält Atome und Moleküle zusammen – wirkt auf elektrische Ladung
3. **Starke Wechselwirkung**
   - Hält Atomkerne zusammen
4. **Schwache Wechselwirkung**
   - Verantwortlich für radioaktiven Zerfall

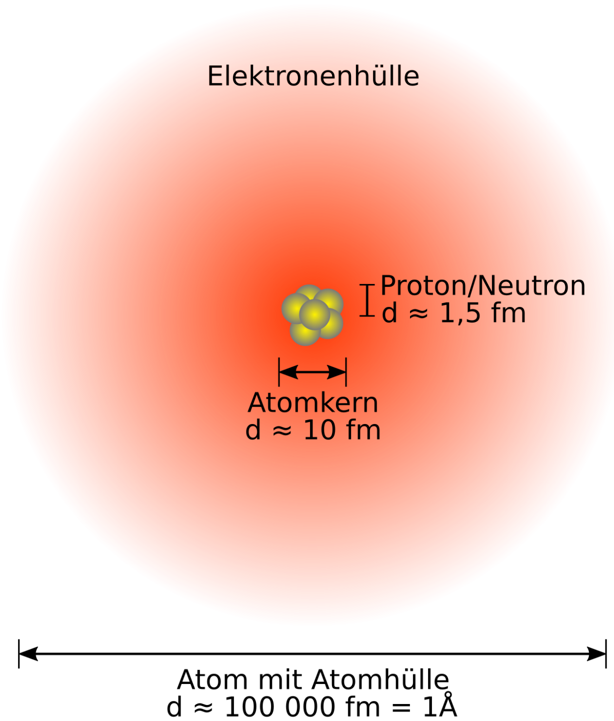
Elektrische Ladung (*electric charge*)

- Alle Materie besteht aus Elementarteilchen, von denen einige elektrische Ladungen tragen
- Elektrische Ladungen treten in zwei Arten auf: positive und negative Ladungen (Vorzeichen: Konvention!)
- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an

Aufbau der Materie

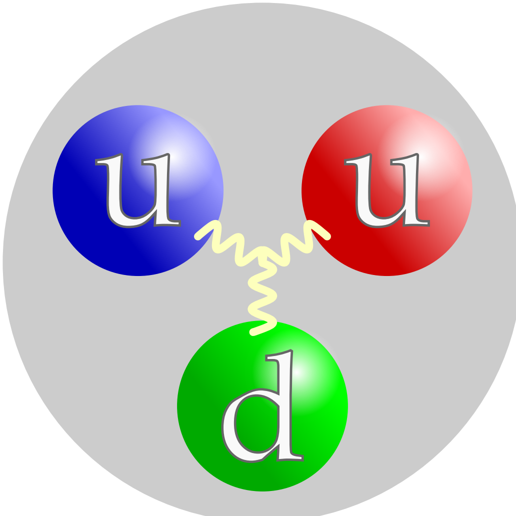
- Atome bestehen aus positiv geladenen Protonen, neutralen Neutronen und negativ geladenen Elektronen

- Protonen und Neutronen bilden den Atomkern
- Elektronen bewegen sich in der Atomhülle um den Atomkern



Elementarladung

- Elektrische Ladungen sind immer ganzzahlige Vielfache der Elementarladung
  $e = 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (Definition des Coulombs)
  - Elektron: $Q = -e$ (!)
  - Proton: $Q = +e$
  - Up-Quark: $Q = +\frac{2}{3}e$, Down-Quark: $Q = -\frac{1}{3}e$
- Man sagt, die Ladung sei *quantisiert*



Coulomb'sches Gesetz – Experiment

https://www.youtube.com/watch?v=9mFlELwuctI

Coulomb'sches Gesetz (*Coulomb's law*)

- Experimente haben gezeigt, dass die Kraft zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 proportional zur Größe der Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands r ist
- Mathematisch wird dies durch das Coulomb'sche Gesetz beschrieben:

$$|\vec{F}_{12}| = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

k ist abhängig vom Einheitensystem. Im SI-System gilt: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante ist, $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N \cdot m^2}}$.

Analogie zur Schwerkraft

Newtonsches Gravitationsgesetz: Kraft zwischen zwei Himmelskörpern

$$|\vec{F}_{12}| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

G: Gravitationskonstante, $G \approx 6{,}6743 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{N \cdot m^2}}$

Beispiel: Relative Stärke von Coulomb- und Gravitationskraft

- Proton: $m_p \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $Q_p = +e$
- Elektron: $m_e \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $Q_e = -e$
- $|\vec{F}_{12,\mathrm{Coulomb}}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$
- $\epsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12} \, \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$
- $|\vec{F}_{12,\mathrm{Gravitation}}| = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
- $G \approx 6{,}6743 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s^2}}$

Elektromagnetismus im Alltag

Fast alle alltäglichen physikalischen Phänomene werden von der elektromagnetischen Wechselwirkung bestimmt!

Die Gravitation spielt nur eine Rolle, da

- es keine negativen Massen gibt $\rightarrow$ immer anziehend
- die elektrischen Ladungen von Elektronen und Protonen exakt aufheben

Elektrische Feldstärke (*electric field [strength]*)

- Ein elektrisch geladenes Teilchen übt eine Kraft auf andere elektrisch geladene Teilchen aus
- Diese Kraft ist umso größer, je größer die Ladung der Probeteilchen ist
- Elektrische Feldstärke: Kraft pro Ladungseinheit, die auf eine Probeladung wirkt

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \Leftrightarrow \vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

Feld = ortsabhängige physikalische Größe (Vektorfeld/Skalarfeld)

$[\vec{E}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

Elektrisches Feld einer Punktladung

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im Abstand $r = |\vec{r}|$ einer Punktladung Q ist:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Feldlinien

- Die Feldlinien eines elektrischen Feldes sind Linien, die die Richtung und Stärke des Feldes darstellen
- Sie verlaufen von positiven zu negativen Ladungen und zeigen die Richtung der Kraft an, die auf eine positive Probeladung wirken würde
- Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Stärke des elektrischen Feldes: Je dichter die Linien, desto stärker das Feld

Superpositionsprinzip

Das elektrische Feld mehrerer (diskreter) Ladungen ist die Vektorsumme der Felder der einzelnen Ladungen

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) \\ &= \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \end{aligned}$$

Übergang zu kontinuierlicher Ladungsverteilung: Integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,') \cdot dV'}{4\pi\varepsilon_0 \cdot |\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Feldlinien: Beispiele

- Punktladung
- Zwei gegensätzliche Punktladungen (Dipol)
- Zwei gleichnamige Punktladungen
- Positiv geladene Ebene
- Zwei entgegengesetzt geladene Platten (Plattenkondensator)

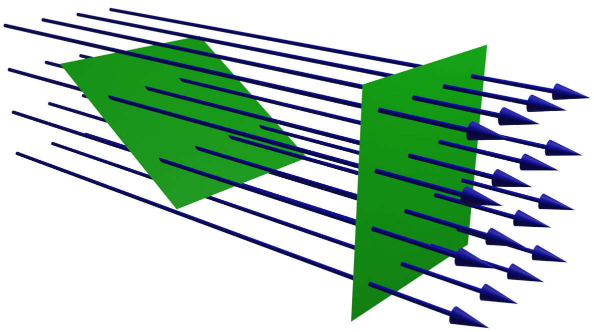
Elektrische Flussdichte (*electric flux density*)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$[\vec{D}] = [\varepsilon_0] \cdot [\vec{E}] = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Fluss durch eine Fläche A:

$$\Psi = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$



Elektrische Flussdichte einer Punktladung

Die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ im Abstand r einer Punktladung Q ist:

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{A(r)} \cdot \vec{e}_r$$

Für eine konstante Flussdichte D auf der Fläche A gilt: $Q = D(r) \cdot A(r)$

Fluss durch geschlossene Oberflächen

Satz von Gauß (*Gauss's law*)

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen}}$$

Beispiel: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Für eine Punktladung Q im Zentrum einer Kugel mit Radius r gilt:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q$$

Daraus folgt:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Beispiel: Unendlich langer, gerader Leiter

Für einen unendlich langen Leiter mit Linienladungsdichte λ verwenden wir eine zylindrische Oberfläche (Radius r, Länge l).

Symmetrie: $\vec{D}$ ist radial und konstant auf der Mantelfläche

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(r) \cdot 2\pi r l = \lambda l$$

Ergebnis:

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

Elektrisches Feld in Materie

- In nicht oder schwach leitenden Materialien können elektrische Felder zu **Polarisation** führen.
- Bei der Polarisation richten sich die positiven und negativen Ladungen innerhalb des Materials unter dem Einfluss des elektrischen Feldes neu aus.
- Dies führt zu einer Verschiebung der Ladungszentren und erzeugt ein internes elektrisches Feld, das dem äußeren Feld entgegenwirkt.
- Solche polarisierbaren Materialien nennt man **Dielektrika**.

Abschwächung des elektrischen Feldes in Dielektrika

Definition:

$$\vec{E}_{\text{Materie}} = \underbrace{\vec{E}_{\text{Vakuum}}}_{\text{freie Ladungen}} - \underbrace{\vec{E}_{\text{Polarisation}}}_{\text{gebundene Ladungen}} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E}_{\text{Vakuum}}$$

mit $\varepsilon_r \geq 1$ Permittivitätszahl (auch relative Permittivität). Beispiele:

Material	ε_r
Luft	1,00059
Gummi	2,5–3,5
Glas	5–7
Destilliertes Wasser	81

Elektrische Flussdichte in Dielektrika

Konvention: man vereinbart, dass die elektrische Flussdichte sich immer auf das durch die freien Ladungen erzeugte Feld bezieht.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{Materie}} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{\text{Materie}} = \varepsilon \vec{E}_{\text{Materie}} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_{\text{Vakuum}}$$

Polarisation $\vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E}_{\text{Polarisation}}$

$\vec{D}$ heißt daher auch (veraltet) **Elektrische Verschiebungsdichte** (*electric displacement field*).

Vorteil: der Satz von Gauß gilt unverändert, wenn man nur die freien Ladungen berücksichtigt:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen, frei}}$$

Elektrische Arbeit

Bewegung einer positiven Probeladung Q_P im Feld einer positiven Punktladung Q^+

$P_1 \to P_2$: $W > 0$: Arbeit wird freigesetzt $P_2 \to P_1$: $W < 0$: Arbeit muss aufgebracht werden

Vgl. Mechanik: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Hier: $\vec{F}$ ist abhängig von r!

$$W_{12} = \sum_i \Delta W_i = \sum_i F_i \cdot \Delta r$$

Elektrische Arbeit und Potential

$$W_{12} = \sum_i \Delta W_i = \sum_i F_i \cdot \Delta r$$

Integral: $\Delta r \to 0$

$$\begin{aligned} W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr = Q_P \cdot \int_{r_1}^{r_2} E(r) \cdot dr = Q_P \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q^+}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} dr \\ = Q_P \cdot \left[\frac{Q^+}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{Q^+}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2} \right] \\ = Q_P \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

Elektrisches Potential einer Punktladung

Das elektrisches Potential φ im Abstand r von einer Punktladung Q:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r}$$

Einheit: $[\varphi] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}$ (Volt)

Punkte gleichen Potentials bilden Äquipotentialflächen.

Analogie: Gravitationspotential

Potentielle Energie bzgl. Referenzhöhe:

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h = m \cdot \varphi_g(h)$$

- Höhenlinien sind Äquipotentiallinien
- Die Kraft wirkt immer in Richtung des stärksten Gefälles (senkrecht zu den Äquipotentiallinien)
- Die „Feldlinien“ sind nie in sich geschlossen

Potentialfelder

Elektrostatische Felder sind **Potentialfelder** oder auch **wirbelfreie Felder**. Für sie gilt:

- Feldlinien beginnen und enden auf Ladungen („Quellen“ oder „Senken“)
- Feldlinien sind nie in sich geschlossen
- Das Feld lässt sich als Gradient (Richtungsableitung) eines Skalarfeldes (Potential) darstellen

Weitere Beispiele für Potentialfelder:

- Schwerkraft auf der Erdoberfläche (2D)
- Schwerkraft zwischen Himmelskörpern (3D)
- Wärmefluss in Festkörpern (1D, 2D, 3D)
- Grundwasserstrom (3D) (nur solange die Strömung wirbelfrei ist!)

Spannung & Arbeit

Elektrische Spannung (*electric voltage*)

Die elektrische Spannung ist definiert als Potentialdifferenz:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Einheit: $[U] = \mathrm{V}$ (Volt)

Elektrische Arbeit (*electric field work*)

Die elektrische Arbeit ist das Produkt aus Ladung und Spannung:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = Q \cdot U_{12}$$

Einheit: $[W] = \mathrm{J}$ (Joule)

Die elektrische Arbeit ist unabhängig vom Weg!

Beziehung zwischen elektrischem Feld und Spannung

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = Q \cdot U_{12}$$

Für die elektrische Spannung gilt allgemein:

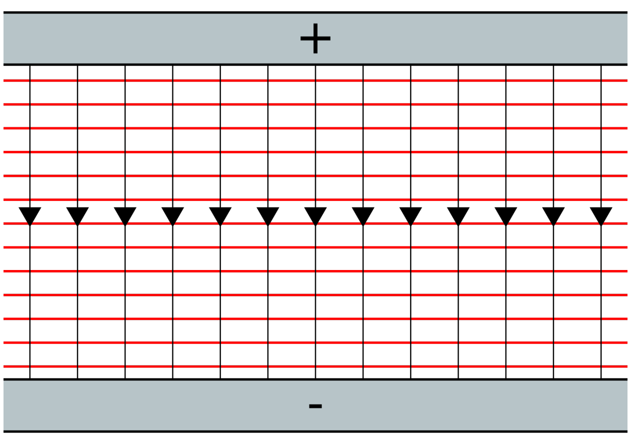
$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Homogenes elektrisches Feld

Ein homogenes elektrisches Feld ist durch konstante Feldstärke und parallele Feldlinien gekennzeichnet.

Wichtige Eigenschaften:

- Konstante Feldstärke E in Betrag und Richtung
- Parallele Feldlinien
- Äquipotentialflächen stehen senkrecht zu den Feldlinien
- Die Spannung zwischen zwei Punkten ist $U = E \cdot d$, wobei d der Abstand in Feldrichtung ist



Homogenes Feld mit dem Satz von Gauß: linke Seite

Unendlich ausgedehnte, gleichmäßig geladene Ebene mit Flächenladungsdichte σ

Gesucht: Elektrische Feldstärke E im Abstand d von der Ebene

Ansatz: Anwendung des Satzes von Gauß mit einem zylindrischen Gauß'schen Volumen

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen}}$$

Gauß'sche Fläche: Zylinder mit Grundfläche A und Achse senkrecht zur geladenen Ebene

- Mantelfläche: $\vec{D} \perp d\vec{A} \Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$
- Grundflächen: $\vec{D} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot dA$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot A + D \cdot A = 2 \cdot D \cdot A$$

Homogenes Feld mit dem Satz von Gauß: rechte Seite

Eingeschlossene Ladung: $Q_{\text{innen}} = \sigma \cdot A$

Satz von Gauß:

$$2 \cdot D \cdot A = \sigma \cdot A$$

$$D = \frac{\sigma}{2} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Ergebnis: Das Feld ist homogen und unabhängig vom Abstand zur Ebene.

Kondensatoren (*capacitors*)

Kondensatoren sind elektrische Bauelemente, die elektrische Ladung speichern können.

Die gespeicherte Ladung für eine gegebene Spannung wird bezeichnet als:

Kapazität (*capacitance*)

$$C := \frac{Q}{U}$$

Einheit: $[C] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}$ (Farad)

Kapazität ≠ Kapazität

Die Kapazität (*capacity*) einer Batterie ist eine Ladungsmenge!

z.B.: $\mathrm{mAh} = 10^{-3}\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3{,}6\,\mathrm{C}$

Nicht zu verwechseln mit der Kapazität (*capacitance*) eines Kondensators in Farad!

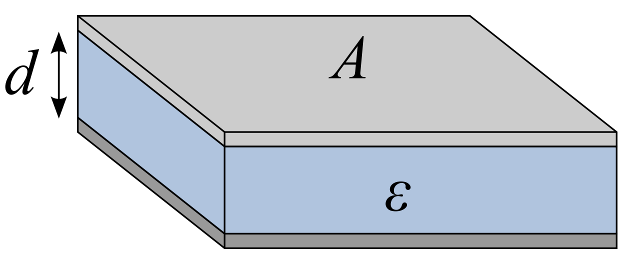
Plattenkondensator

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}, \qquad U = E \cdot d = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \cdot d$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

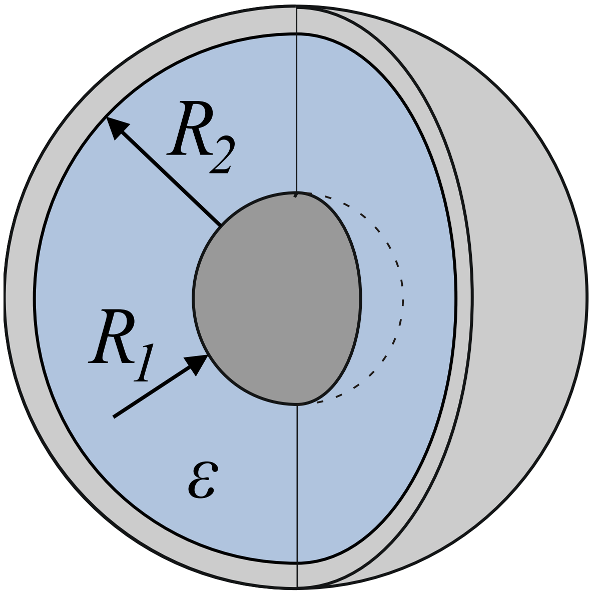
Kapazität steigt mit:

- Fläche A der Platten
- relativer Permittivität ε_r des Dielektrikums
- Abnahme des Plattenabstands d



Kugelkondensator

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen leitenden Kugelschalen mit den Radien R_i (innen) und R_a (außen).



Kugelkondensator: Herleitung mit dem Satz von Gauß

Elektrisches Feld (Satz von Gauß):

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

Kapazität des Kugelkondensators

Spannung zwischen den Kugeln:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dr$$

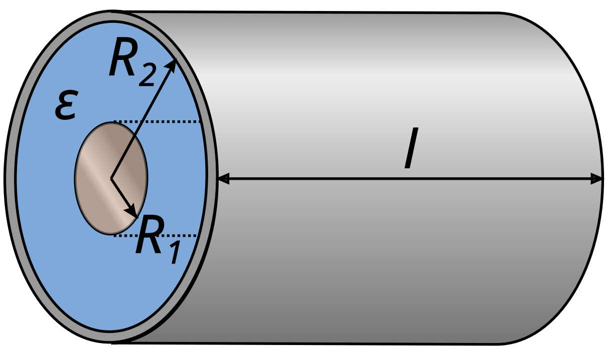
$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Zylinderkondensator

Ein Zylinderkondensator besteht aus zwei koaxialen leitenden Zylindern mit den Radien R_1 (innen) und R_2 (außen) und der Länge l.



Zylinderkondensator: Herleitung mit dem Satz von Gauß

Gesucht: Elektrisches Feld zwischen den Zylindern

Ansatz: Satz von Gauß mit zylindrischer Gauß'scher Fläche (Radius r, Länge l)

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q_{\text{eingeschlossen}}$$

Symmetrie: Das Feld zeigt radial nach außen, konstant auf Zylinderflächen

- Mantelfläche: $\vec{D} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \vec{D}\cdot d\vec{A} = D\cdot dA$
- Grundflächen: $\vec{D} \perp d\vec{A} \Rightarrow \vec{D}\cdot d\vec{A} = 0$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(r) \cdot 2\pi r l = Q$$

Zylinderkondensator: Elektrisches Feld

Aus dem Satz von Gauß:

$$D(r) \cdot 2\pi r l = Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{2\pi r l}$$

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon r l}$$

Ergebnis: Das elektrische Feld nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab.

Zylinderkondensator: Spannung und Kapazität

Spannung zwischen den Zylindern:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\,dr$$

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1}$$

Kapazität:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Energie im Kondensator

Im elektrischen Feld eines Kondensators ist Energie gespeichert, die bei Entladung wiedergewonnen werden kann.

Während des Aufladevorgangs nimmt die Spannung mit der Ladung kontinuierlich zu:

$$U(Q) = \frac{Q}{C}$$

Die beim Aufladen gespeicherte Energie berechnet sich zu:

$$W = \int_0^Q U(q) \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

$$[W] = [U] \cdot [Q] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{C} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{W} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{J}$$

Parallelschaltung von Kondensatoren

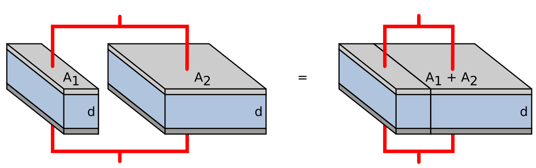
Bei der Parallelschaltung von Kondensatoren addieren sich die Kapazitäten:

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Eigenschaften:

- Gleiche Spannung an allen Kondensatoren
- Die Gesamtladung ist die Summe der Einzelladungen

$$U_{\text{ges}} = U_1 = U_2 = \cdots = U_n$$



Reihenschaltung von Kondensatoren

Bei der Reihenschaltung von Kondensatoren addieren sich die Kehrwerte der Kapazitäten:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Eigenschaften:

- Gleiche Ladung auf allen Kondensatoren $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q_{\text{ges}}$
- Die Gesamtspannung ist die Summe der Einzelspannungen

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{U_{\text{ges}}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{U_1 + U_2 + \cdots + U_n} = \frac{Q_{\text{ges}}}{Q_{\text{ges}} \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

Kondensatoren mit inhomogenen Dielektrika 1

Wenn ein Plattenkondensator aus zwei Bereichen mit unterschiedlichen Dielektrika besteht, berechnet sich die Gesamtkapazität als:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d} \cdot (\varepsilon_{r1} \cdot A_1 + \varepsilon_{r2} \cdot A_2)$$

Dies entspricht einer Parallelschaltung von zwei Teilkondensatoren.

Kondensatoren mit inhomogenen Dielektrika 2

Wenn ein Plattenkondensator aus zwei hintereinander liegenden Schichten mit unterschiedlichen Dielektrika besteht, berechnet sich die Gesamtkapazität als:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A}{\varepsilon_{r2} \cdot d_1 + \varepsilon_{r1} \cdot d_2}$$

Dies entspricht einer Reihenschaltung von zwei Teilkondensatoren.

Übersicht: Größen im elektrischen Feld

Größe	Definition	Einheit
Elektrische Ladung (*electric charge*)	Q	$[Q] = \mathrm{C}$
Spannung (*voltage*)	$U = \Delta\varphi$	$[U] = \mathrm{V}$
Kapazität (*capacitance*)	$C = \frac{Q}{U}$	$[C] = \mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$
Elektrische Feldstärke (*electric field [strength]*)	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$	$[\vec{E}] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$
Elektrische Flussdichte (*electric flux density*) = [Di-]Elektrische Verschiebungsdichte (*electric displacement field*)	$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$	$[\vec{D}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$
Elektrische Feldkonstante (*electric constant*) = Permittivität des Vakuums (*vacuum permittivity*)	ε_0	$[\varepsilon_0] = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N \cdot m}^2}$
[Absolute] Permittivität (*[absolute] permittivity*) = ~~Dielektrizitätskonstante~~	ε	$[\varepsilon] = \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N \cdot m}^2}$
Relative Permittivität (*relative permittivity*) = ~~Relative Dielektrizitätskonstante~~	$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	dimensionslos

Quiz: Das Elektrische Feld

Warum spielt die Gravitation im atomaren Maßstab praktisch keine Rolle?

- A) Weil Protonen und Elektronen keine Masse besitzen
- B) Weil die elektromagnetischen Kräfte viel stärker sind als die Gravitationskräfte
- C) Weil Gravitation nur zwischen Himmelskörpern wirkt
- D) Weil sie durch Quantenmechanik verboten wird

Warum sind Atome trotz geladener Bestandteile nach außen elektrisch neutral?

- A) Weil sich Protonen und Neutronen ausgleichen
- B) Weil sich die gleiche Anzahl an Protonen (positiv) und Elektronen (negativ) kompensiert
- C) Weil Elektronen keine Ladung haben
- D) Weil neutrale Teilchen überwiegen

Was bedeutet, dass elektrische Ladung „quantisiert“ ist?

- A) Ladung existiert nur bei Quarks
- B) Ladung tritt nur in ganzzahligen Vielfachen einer kleinsten Einheit auf
- C) Ladung kann beliebige Werte annehmen
- D) Ladung hängt vom Beobachter ab

Was passiert mit der Kraft zwischen zwei Punktladungen nach dem Coulomb-Gesetz, wenn der Abstand halbiert wird?

- A) Sie halbiert sich
- B) Sie vervierfacht sich
- C) Sie verdoppelt sich
- D) Sie bleibt gleich

Was zeigt die Richtung einer elektrischen Feldlinie an?

- A) Die Bewegung einer negativen Probeladung
- B) Die Richtung der Kraft auf eine positive Probeladung

- C) Die Richtung der Polarisation
- D) Die Richtung minimaler Energie

Wann ist der Einsatz des Gaußschen Gesetzes besonders sinnvoll?

- A) Bei beliebigen Ladungsverteilungen
- B) Bei jeder einzelnen Punktladung
- C) Bei Systemen mit hoher Symmetrie (z. B. Kugel, Zylinder, Ebene)
- D) Nur bei negativ geladenen Objekten

Warum schwächt ein Dielektrikum das elektrische Feld?

- A) Weil es freie Elektronen enthält
- B) Weil es durch Polarisation ein Gegenfeld erzeugt
- C) Weil es Ladung vollständig abschirmt
- D) Weil es die Permittivität verringert

Warum ist die elektrische Arbeit beim Bewegen einer Ladung im elektrostatischen Feld wegunabhängig?

- A) Weil das Feld nur innerhalb von Leitern existiert
- B) Weil Feldlinien immer geschlossen sind
- C) Weil es sich um ein Potentialfeld handelt
- D) Weil die Kraft immer konstant ist

Was beschreibt das elektrische Potential physikalisch?

- A) Die Anzahl der Feldlinien
- B) Die potenzielle Energie pro Ladung
- C) Die Feldstärke unabhängig vom Ort
- D) Die Stärke der Polarisation

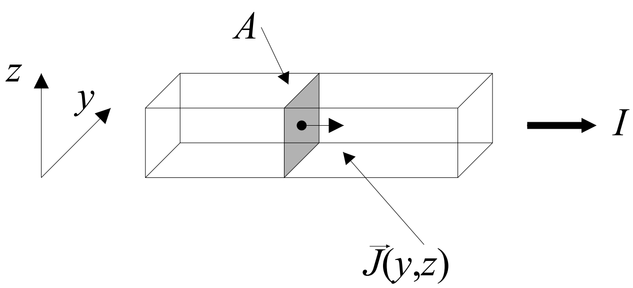
Gleichstrom

1. Stromstärke und Stromdichte
2. Widerstand und Ohm'sches Gesetz
3. Stromkreisberechnungen (Kirchhoff'sche Regeln)
4. Zweipoltheorie
5. Arbeit & Leistung

Elektrischer Strom (*electric current*)

Strom ist der gerichtete Fluss von elektrischer Ladung

- Stromdichte $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$
  - $\vec{v}$: Geschwindigkeit *positiver* Ladungsträger
- Stromstärke $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{dQ}{dt}$
- $[I] = \mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$
- $[\vec{J}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$



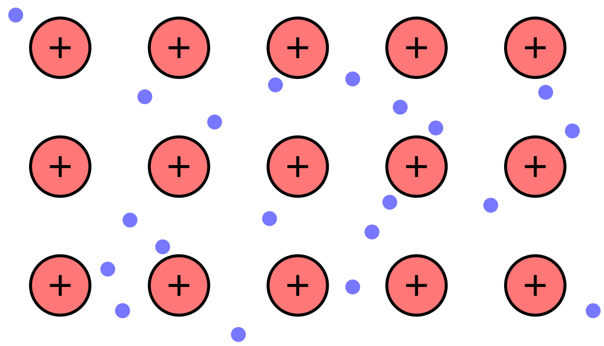
Stromrichtung & Ladungsträger

- $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$ zeigt in die Richtung, in die sich *positive* Ladung bewegt – egal ob die tatsächlichen Ladungsträger positiv oder negativ sind!
- Das ist auch die *Zählrichtung* der Stromstärke I

Stromleitung in Metallen

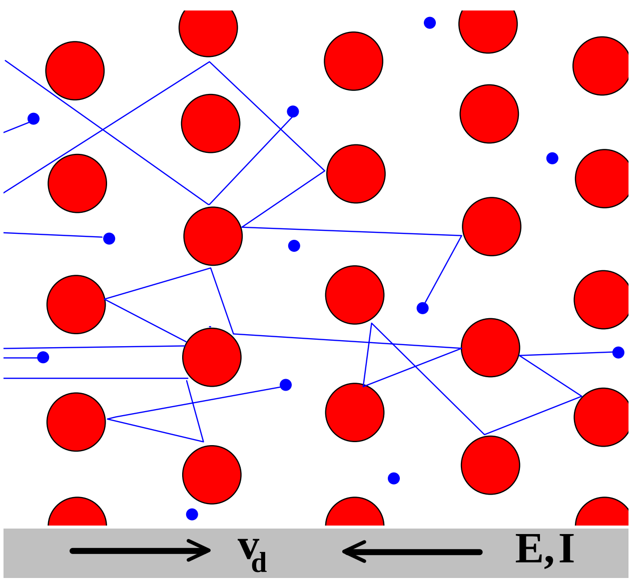
- In Metallen gibt jedes Atom Elektronen ab, die sich frei im Gitter der positiv geladenen Atomrümpfe bewegen können („Elektronengas“)
- Die Ladungsdichte der Elektronen ist jederzeit konstant, da eine Ansammlung ein

elektrisches Feld erzeugen würde, dass durch Abstoßung der Elektronen wieder ausgeglichen wird → der Leiter ist überall elektrisch neutral



Metalle im elektrischen Feld

Klassisches Bild: erfährt das Elektronengas ein elektrisches Feld, werden die Elektronen beschleunigt, nach kurzer Zeit aber durch Stöße mit dem Metallgitter wieder abgebremst. Im Mittel ergibt sich dadurch eine konstante mittleren Geschwindigkeit $\vec{v}_d$, die Driftgeschwindigkeit. Sie geht *entgegen* der Feldrichtung $\vec{v}_d = \vec{J}/\rho$, $\rho = -ne$.



Zahlenbeispiel: Driftgeschwindigkeit im Kupferdraht

Kupfer, $A = 1\,\mathrm{mm}^2$, $I = 1\,\mathrm{A}$:

- Dichte freier Elektronen: $n \approx 8{,}5 \cdot 10^{28}\,\frac{1}{\mathrm{m}^3}$
- Ladungsträgerdichte: $\rho = -n \cdot e \approx -1{,}36 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$

- Stromdichte: $|\vec{J}| = \frac{I}{A} = \frac{1\,\mathrm{A}}{1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 1 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$
- Driftgeschwindigkeit: $|\vec{v_d}| = \frac{|\vec{J}|}{|\rho|} \approx 7{,}35 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}$

Elektrische Leitfähigkeit von Metallen (*electric conductivity*)

- Erfährt das Elektronengas ein elektrisches Feld, bewegen sich die Elektronen *entgegen* der Feldrichtung
- Für ein gegebenes Material ist die Stromdichte umso höher, je höher das elektrische Feld ist
- Der Proportionalitätsfaktor ist die elektrische Leitfähigkeit σ des Materials

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

= Ohm'sches Gesetz (*Ohm's law*)

Achtung: die proportionale Beziehung gilt nur für *lineare Leiter* (z.B. Metalle bei konstanter Temperatur)

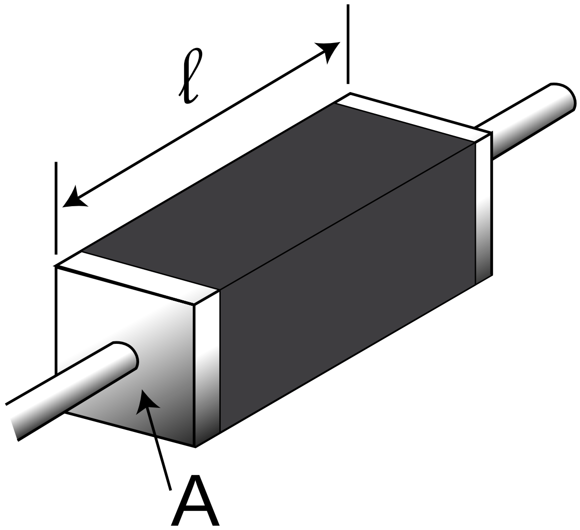
Ohm'sches Gesetz im linearen Leiter

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

- Stromdichte muss konstant sein
- Elektrisches Feld muss konstant sein
- Potential φ muss linear abfallen
  - $\Phi(l) = \phi(0) - E \cdot l$
  - $U = \phi(0) - \phi(l) = E \cdot l$

$$I = J \cdot A = \sigma \cdot E \cdot A = \sigma \cdot \frac{U}{l} \cdot A = \frac{U}{R}$$

- Elektrischer Widerstand $R = \frac{l}{\sigma \cdot A}$ (*electric resistance*)



Widerstand und Leitwert

Der elektrische Widerstand R ist definiert durch das Ohm'sche Gesetz:

$$R = \frac{U}{I}$$

Einheit: $[R] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$ (Ohm)

Der elektrische Leitwert G ist der Kehrwert des Widerstands:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$$

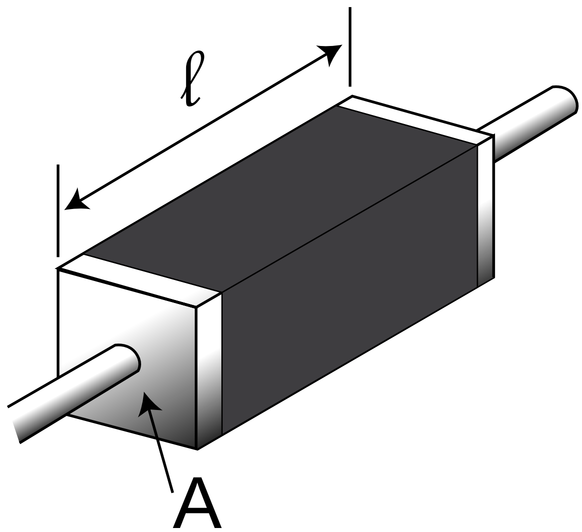
Einheit: $[G] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = \mathrm{S}$ (Siemens)

Materialeigenschaften vs. Bauteilgrößen

Materialeigenschaften (intensiv, unabhängig von Geometrie): - **Spezifischer Widerstand** ρ: Widerstand pro Längeneinheit bei Einheitsquerschnitt - **Leitfähigkeit** $\sigma = \frac{1}{\rho}$: Leitfähigkeit des Materials

Bauteilgrößen (extensiv, abhängig von Geometrie): - **Widerstand** $R = \rho\frac{l}{A}$: Widerstand eines konkreten Leiters - **Leitwert** $G = \frac{1}{R} = \sigma\frac{A}{l}$: Leitwert eines konkreten Leiters

Beispiel: Kupfer hat immer die gleiche Leitfähigkeit $\sigma_{\mathrm{Cu}} = 58$ MS/m, aber ein dickeres Kabel hat einen kleineren Widerstand R.



Übersicht der Größen im linearen Leiter

Größe	Definition	Einheit	Name
Spannung (*voltage*)	$U = \Delta\varphi$	$[U] = \mathrm{V}$	Volt
Stromstärke (*current*)	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	$[I] = \mathrm{A}$	Ampere
Widerstand (*resistance*)	$R = \frac{U}{I}$	$[R] = \Omega$	Ohm
Leitwert (*conductance*)	$G = \frac{1}{R}$	$[G] = \mathrm{S} = \frac{1}{\Omega}$	Siemens
spezifischer Widerstand (*resistivity*)	$\rho = R\frac{A}{l}$	$[\rho] = \Omega \cdot \mathrm{m}$	Ohm-Meter
Leitfähigkeit (*conductivity*)	$\sigma = \frac{1}{\rho}$	$[\sigma] = \mathrm{S/m}$	Siemens pro Meter

Temperaturabhängigkeit des Widerstands

Bei den meisten Materialien ändert sich der Widerstand mit der Temperatur.

Kleinsignalverhalten (lineare Näherung):

$$R(T) = R(T_0) \cdot [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$$

Dabei ist:

- α der Temperaturkoeffizient des Widerstands (Einheit: $[\alpha] = \frac{1}{\mathrm{K}}$)
- T_0 die Bezugstemperatur (üblicherweise 20°C oder 0°C)
- T die aktuelle Temperatur

Elektrische Leitfähigkeit verschiedener Materialien

Bei Leitern nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur zu (positiver Temperaturkoeffizient > 0).

Typische Werte für einige Leitermaterialien bei 20°C: | Leitermaterial | Spez. Widerstand ρ $(\mu\Omega \cdot \mathrm{m})$ | Leitfähigkeit σ (MS/m) | Temperaturkoeffizient α (1/K) | |————–|—————————————|————————-|————————————| | Silber | 0,016 | 63 | 3,8 · 10−3 | | Kupfer | 0,017 | 58 | 3,9 · 10−3 | | Aluminium | 0,027 | 38 | 4,3 · 10−3 | | Messing | 0,062 | 16 | 2,0 · 10−3 |

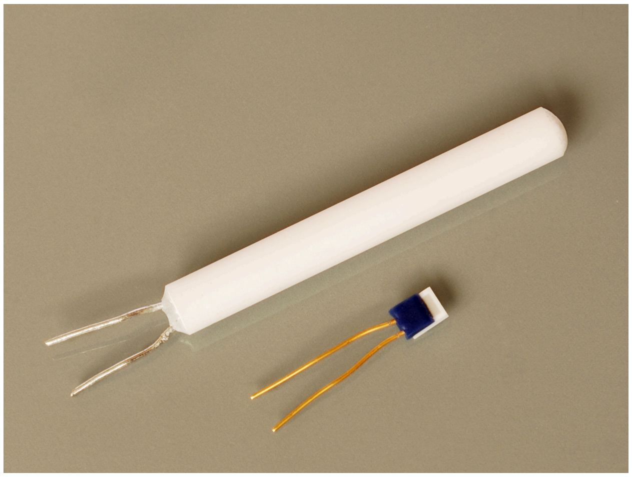
$R(T) = R(T_0) \cdot [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$

Metalle als Temperatursensoren

Die Temperaturabhängigkeit des Widerstands macht Metalle zu präzisen Temperatursensoren.

Platin-Widerstandsthermometer (Pt100): - Pt100: $R(0°\mathrm{C}) = 100\,\Omega$ - Temperaturkoeffizient: $\alpha_{\mathrm{Pt}} = 3{,}85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$

Vorteile von Platin-Sensoren: - Hohe Langzeitstabilität - Breiter Messbereich (-200°C bis +850°C) - Gute Linearität - Chemische Beständigkeit



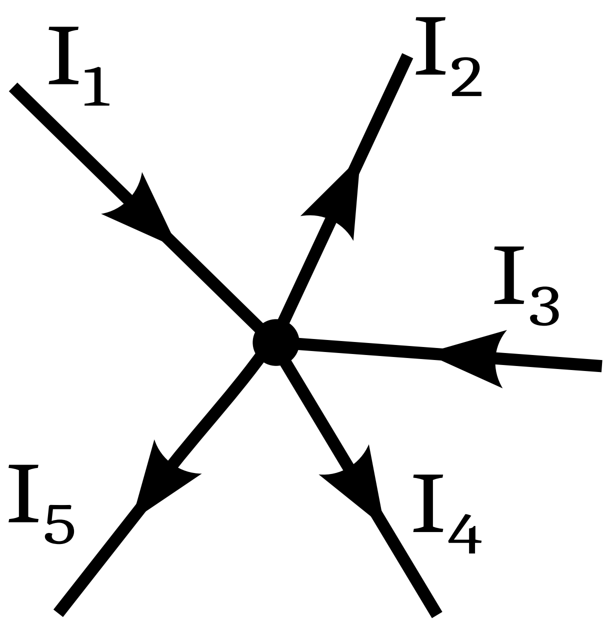
Stromkreisberechnungen

1. Die Kirchhoff'schen Gesetze
2. Zweipoltheorie
3. Arbeit und Leistung im Gleichstromkreis

Knotenpunktregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz)

In einem Knotenpunkt kann weder Ladung gespeichert noch erzeugt werden. Die Summe aller zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller abfließenden Ströme:

$$\sum_k I_k = 0$$



Mathematische Analogie

In einer stationären (zeitlich unveränderlichen) Stromverteilung ist die elektrische Ladung überall konstant. Der gesamte Strom durch jede geschlossene Oberfläche ist Null:

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ_{\text{innen}}}{dt} = 0$$

Vgl. Satz von Gauß in Abwesenheit von eingeschlossener Ladung:

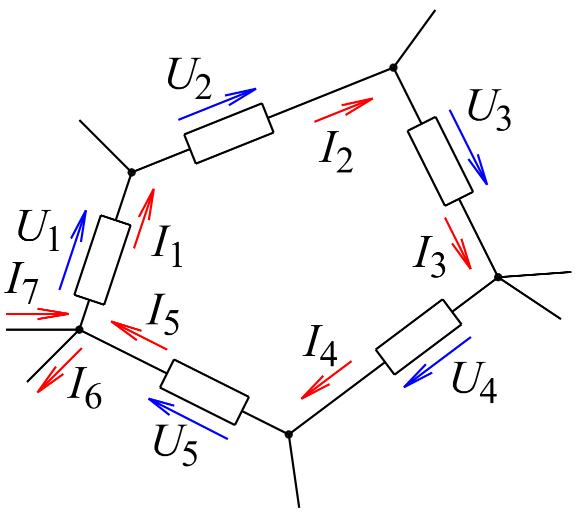
$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{innen}} = 0$$

(NB: die obige Gleichung folgt *nicht* aus der unteren – die mathematische Analogie gilt, da sowohl das elektrostatische Feld als auch die stationäre Stromdichte **quellenfreie Vektorfelder** sind.)

Maschenregel (2. Kirchhoff'sches Gesetz)

Die Summe aller in einer Masche auftretenden Spannungen ist Null:

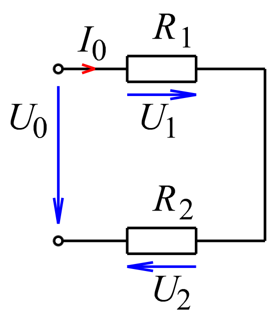
$$\sum_k U_k = 0$$



Reihenschaltung von Widerständen

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

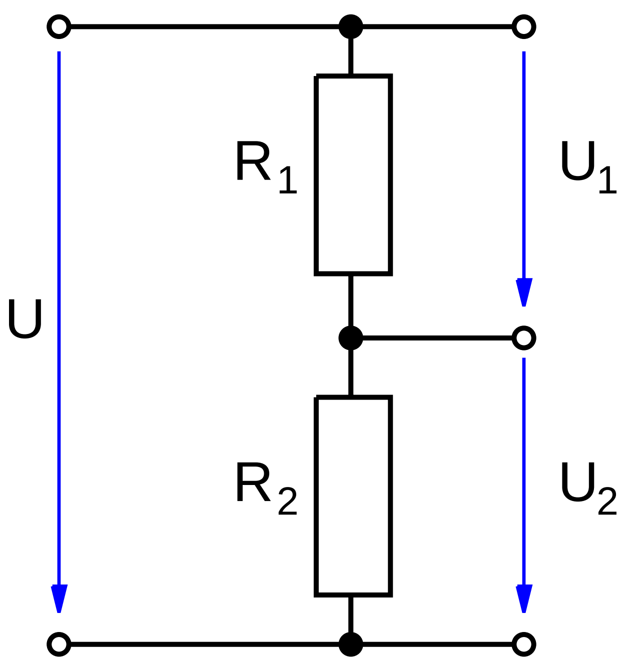
- Gleicher Strom durch alle Widerstände: $I = I_1 = I_2 = \cdots = I_n$
- Die Gesamtspannung ist die Summe der Einzelspannungen: $U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
- Gesamtwiderstand ist größer als der größte Einzelwiderstand



Spannungsteiler

Bei einer Reihenschaltung teilt sich die Gesamtspannung im Verhältnis der Widerstände auf:

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$



Parallelschaltung von Widerständen

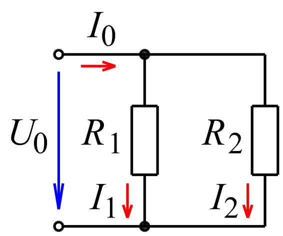
Bei einer Parallelschaltung von Widerständen addieren sich die Leitwerte zum Gesamtleitwert:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Oder mit Leitwerten:

$$G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

- Der Gesamtstrom ist die Summe der Einzelströme: $I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$
- Gleiche Spannung an allen Widerständen: $U = U_1 = U_2 = \cdots = U_n$
- Der Gesamtwiderstand ist kleiner als der kleinste Einzelwiderstand



Parallelschaltung: Herleitung

Wegen der Knotenregel gilt:

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_n}$$

Außerdem per Definition:

$$I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_{\text{ges}}}$$

Es folgt:

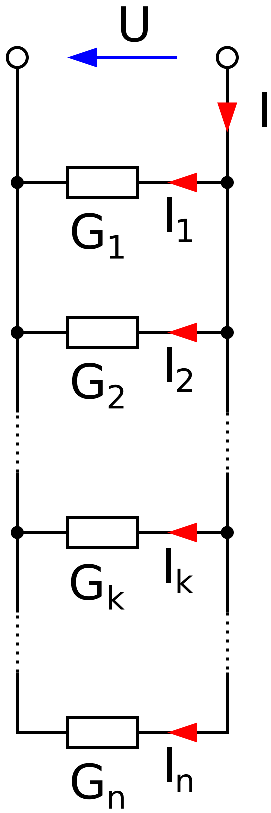
$$\Rightarrow \frac{U}{R_{\text{ges}}} = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Stromteilerregel

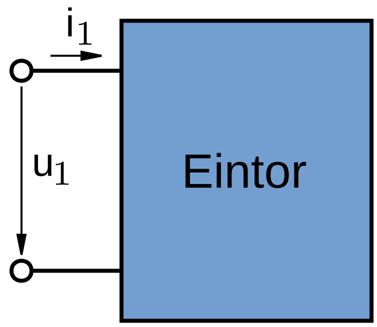
Bei einer Parallelschaltung teilt sich der Gesamtstrom im umgekehrten Verhältnis der Widerstände bzw. im direkten Verhältnis der Leitwerte auf:

$$\frac{I}{G_{\text{ges}}} = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \cdots = \frac{I_n}{G_n}$$



Zweipoltheorie

Ein Zweipol (*two-pole*) oder Eintor (*one-port*) ist ein elektrisches Bauteil mit zwei zugänglichen Anschlüssen



Gliederung

1. Passive lineare Zweipole
2. Aktive lineare Zweipole
    1. Ideale Spannungsquelle
    2. Ideale Stromquelle
    3. Reale Spannungsquelle
    4. Reale Stromquelle
    5. Äquivalenz von realer Spannungs- und Stromquelle

Passive lineare Zweipole

- Passiv: Zweipol gibt keine Energie ab
- Linear: Strom-Spannungs-Kennlinie ist eine Gerade

Passive lineare Zweipole können zu einem Ersatzwiderstand zusammengefasst werden

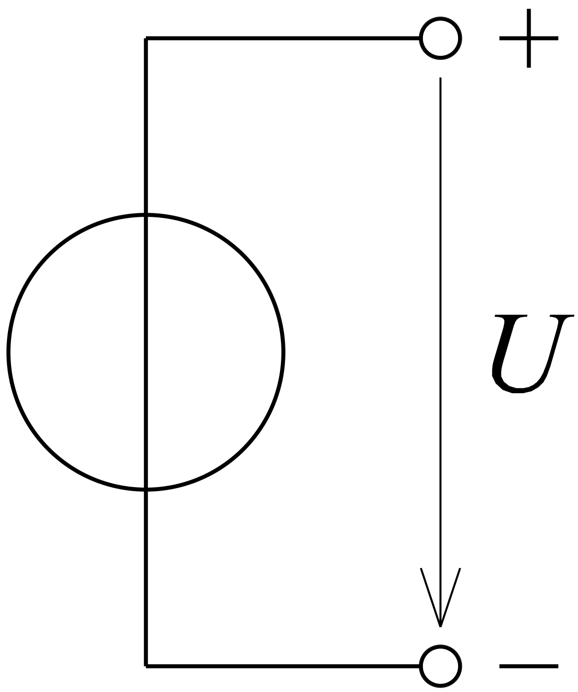
$$U = R \cdot I$$

Ideale Spannungsquelle

Eine ideale Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung U_0 unabhängig von der Belastung.

Eigenschaften:

- Konstante Klemmenspannung $U = U_0$
- Innenwiderstand $R_i = 0$
- Beliebiger Strom I möglich

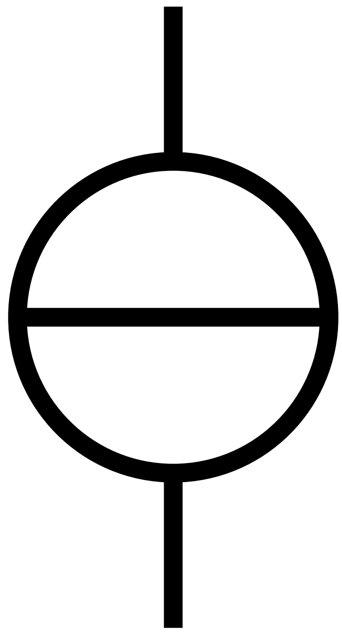


Ideale Stromquelle

Eine ideale Stromquelle liefert einen konstanten Strom I_0 unabhängig von der Belastung.

Eigenschaften:

- Konstanter Strom $I = I_0$
- Innenwiderstand $R_i = \infty$
- Beliebige Spannung U möglich

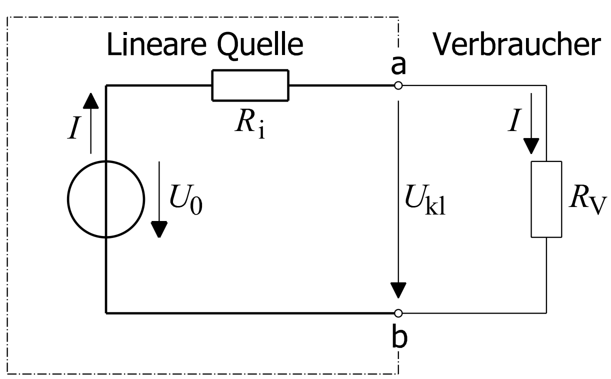


Reale Spannungsquelle

Eine reale Spannungsquelle kann als Reihenschaltung einer idealen Spannungsquelle U_0 mit einem Innenwiderstand R_i dargestellt werden.

Eigenschaften:

- Klemmenspannung nimmt mit zunehmendem Strom ab: $U = U_0 - R_i \cdot I$
- Bei Leerlauf: $U = U_0$ (maximale Spannung)
- Bei Kurzschluss: $I = \frac{U_0}{R_i}$ (maximaler Strom)

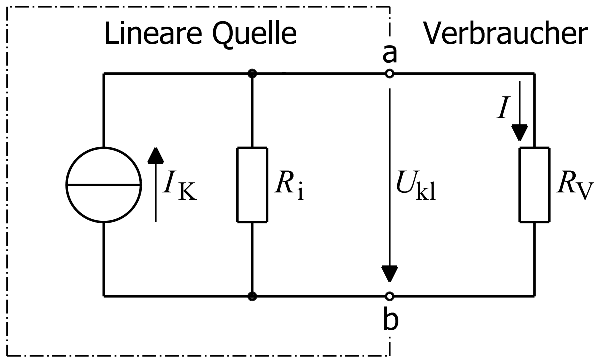


Reale Stromquelle

Eine reale Stromquelle kann als Parallelschaltung einer idealen Stromquelle I_0 mit einem Innenwiderstand R_i dargestellt werden.

Eigenschaften:

- Strom nimmt mit zunehmender Spannung ab: $I = I_0 - \frac{U}{R_i}$
- Bei Leerlauf: $U = I_0 \cdot R_i$ (maximale Spannung)
- Bei Kurzschluss: $I = I_0$ (maximaler Strom)



Äquivalenz von realer Spannungs- und Stromquelle

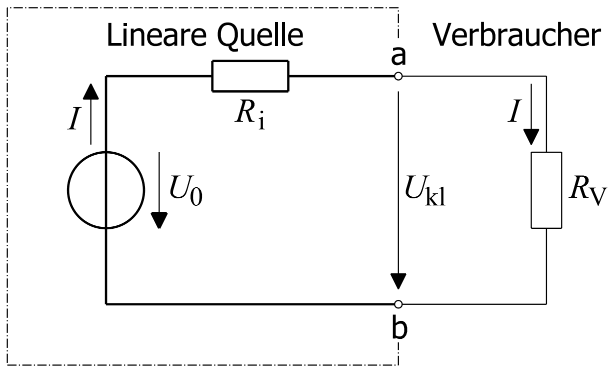
Die reale Spannungsquelle und reale Stromquelle sind äquivalent, wenn folgende Beziehungen gelten:

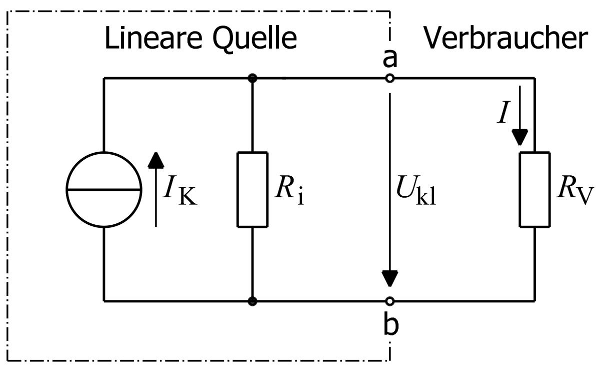
$$U_0 = I_0 \cdot R_i$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R_i}$$

Umrechnung: - Spannungsquelle → Stromquelle: $I_0 = \frac{U_0}{R_i}$ - Stromquelle → Spannungsquelle: $U_0 = I_0 \cdot R_i$

Beide Darstellungen beschreiben dieselbe I-U-Kennlinie: $U_{\text{kl}} = U_0 - R_i \cdot I$





Reihenschaltung von aktiven, linearen Zweipolen

Bei der Reihenschaltung von realen Spannungsquellen addieren sich die Leerlaufspannungen und die Innenwiderstände:

$$U_{0,\text{ges}} = U_{0,1} + U_{0,2} + \cdots + U_{0,n}$$

$$R_{i,\text{ges}} = R_{i,1} + R_{i,2} + \cdots + R_{i,n}$$

Anwendung: Batteriepacks in Taschenlampen, Elektroautos **Vorteil:** Höhere Gesamtspannung **Nachteil:** Höherer Innenwiderstand, bei Ausfall einer Quelle fällt das gesamte System aus

Parallelschaltung von aktiven, linearen Zweipolen

Bei der Parallelschaltung von realen Spannungsquellen mit gleicher Leerlaufspannung U_0 addieren sich die Leitwerte der Innenwiderstände:

$$\frac{1}{R_{i,\text{ges}}} = \frac{1}{R_{i,1}} + \frac{1}{R_{i,2}} + \cdots + \frac{1}{R_{i,n}}$$

Die gemeinsame Leerlaufspannung bleibt U_0.

Anwendung: Notstromversorgung, Batteriepacks für höhere Ströme **Vorteil:** Geringerer Innenwiderstand, höhere verfügbare Ströme **Nachteil:** Nur bei gleichen Spannungen sinnvoll, Ausgleichsströme bei unterschiedlichen Quellen

Arbeit und Leistung in Gleichstromkreisen

1. Elektrische Arbeit
2. Elektrische Leistung

Elektrische Arbeit (Energie)

Die elektrische Arbeit ist definiert als das Produkt aus Spannung, Strom und Zeit:

$$W = U \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Einheit: $[W] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{W} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{J}$ (Joule)

Elektrische Leistung

Die elektrische Leistung ist definiert als elektrische Arbeit pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Einheit: $[P] = \mathrm{W}$ (Watt)

Leistungsanpassung

Die Leistungsanpassung beschäftigt sich mit der Frage, bei welchem Verbraucherwiderstand R die maximale Leistung aus einer Quelle entnommen werden kann.

Für eine reale Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i beträgt die Leistung am Verbraucher:

$$P = R \cdot I^2 = U_0^2 \cdot \frac{R}{(R_i + R)^2}$$

Diese Leistung wird maximal, wenn der Verbraucherwiderstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle ist:

$$R = R_i$$

Die maximale Leistung beträgt dann:

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}$$

Anpassungsverhältnis und Wirkungsgrad

Das Anpassungsverhältnis α ist definiert als:

$$\alpha = \frac{R}{R_i}$$

Der Wirkungsgrad η gibt das Verhältnis der am Verbraucher umgesetzten Leistung zur Gesamtleistung der Quelle an:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{R_i + R} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

Bei optimaler Leistungsanpassung ($\alpha = 1$) beträgt der Wirkungsgrad nur $\eta = 0,5$ (50%).

Betriebszustände einer aktiven Quelle

	Last	Leistung Quelle P_0	Leistung Last P	Wirkungsgrad η
Kurzschluß	$R = 0$	$P_0 = \frac{U_0^2}{R_i}$	$P = 0$	$\eta = 0$
Unteranpassung	$R < R_i$	$P_0 = \frac{U_0^2}{R_i} \cdot \frac{R}{R+R_i}$	$0 < P < P_{\text{max}}$	$0 < \eta < 0{,}5$
Anpassung	$R = R_i$	$P_0 = \frac{U_0^2}{2R_i}$	$P = \frac{U_0^2}{4R_i}$	$\eta = 0{,}5$
Überanpassung	$R > R_i$	$P_0 = \frac{U_0^2}{R_i} \cdot \frac{R}{R+R_i}$	$0 < P < P_{\text{max}}$	$0{,}5 < \eta < 1$
Leerlauf	$R \to \infty$	$P_0 = 0$	$P = 0$	$\eta = 1$